MERCER GAMA

METODOLOGIA DE ESTUDO DE ADERÊNCIA DAS HIPÓTESES BIOMÉTRICAS, DEMOGRÁFICAS, ECONÔMICAS E FINANCEIRAS

Nota Técnica Atuarial

Agosto/2017

ÍNDICE

1 OBJETIVO

Esta Nota Técnica Atuarial – NTA objetiva estabelecer e fixar os procedimentos técnicos a serem adotados pela Mercer GAMA na execução dos testes de aderência **das hipóteses biométricas, demográficas, econômicas e financeiras de planos de benefícios de caráter previdenciário.**

Em termos gerais, os testes de aderência são, geralmente, empregados para verificar o ajuste de distribuições estatísticas a conjuntos de dados, ou seja, se uma hipótese de certa distribuição se ajusta ou não aos dados amostrais.

Esta Nota Técnica vem ao encontro das melhores práticas de Governança, em especial, no que merece a atenção das patrocinadoras, dirigentes da EFPC, participantes e assistidos de plano de benefício previdencial, em observância a Resolução MPS/CGPC nº 18 de 28 de março de 2006, e alterações, bem como aos preceitos contidos na Resolução MPS/CGPC nº 13, de 01 de outubro de 2004, Instrução MPS/PREVIC nº 9, de 14 de dezembro de 2010 e Instrução MPS/PREVIC nº 23, de 26 de junho de 2015.

Assim, o presente documento apresenta, de forma genérica, a metodologia e critérios utilizados na definição e demonstração das **hipóteses biométricas, demográficas, econômicas e financeiras** aderentes à massa de participantes e assistidos, bem como ao plano de benefícios e à patrocinadora, de forma a auxiliar na correta compreensão dos resultados dos testes empregados para a escolha das hipóteses adotadas na avaliação atuarial do plano de benefício previdencial.

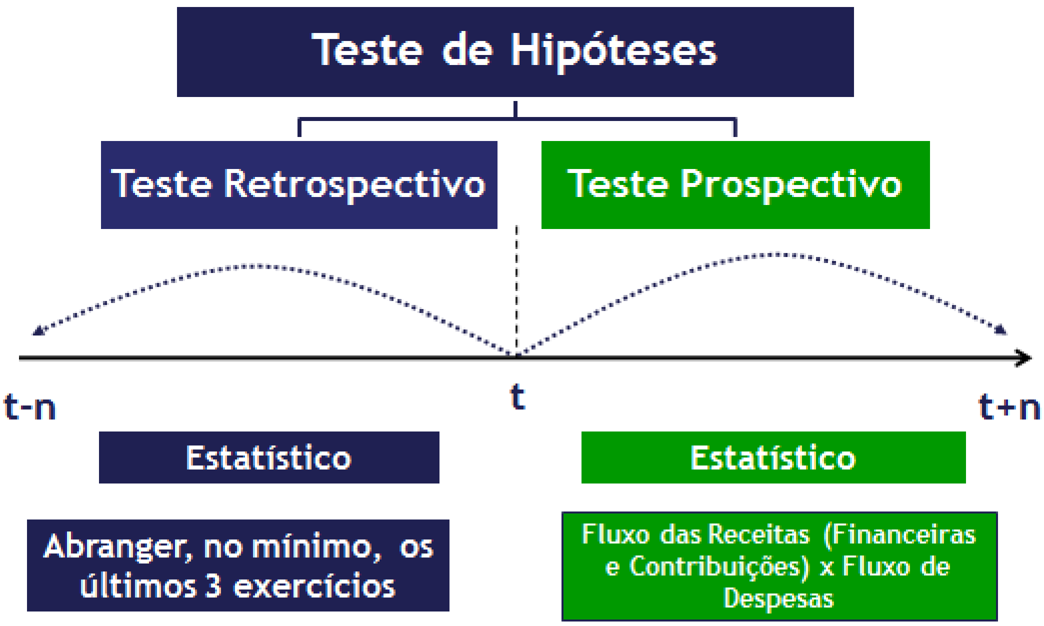
Esta Nota Técnica Atuarial tem validade para todos os estudos de aderência desenvolvidos pela Mercer GAMA a partir dos testes realizados para a definição das hipóteses atuariais a serem utilizadas nas avaliações atuariais de encerramento de exercício de 2017. A vigência deste documento perdurará até que outra Nota Técnica Atuarial o substitua.

2 EMBASAMENTO TÉCNICO

Os procedimentos técnicos adotados na execução dos testes de aderência **das hipóteses biométricas, demográficas, econômicas e financeiras**, compreenderam os estudos das seguintes hipóteses, de acordo com a sua aplicação em um plano de benefício:

- **Hipóteses Biométricas**: Mortalidade Geral, Entrada em Invalidez, Mortalidade de Inválidos e Morbidez;
- **Hipóteses Demográficas**: Taxa de Rotatividade e Composição Familiar;
- **Hipóteses Econômicas Financeiras**: Taxa de Crescimento Real de Salários, Taxa de juros técnicos de desconto atuarial e Fator de Capacidade.

Descrevemos, a seguir, as metodologias de execução dos **testes de aderência retrospectivos e prospectivo**, de acordo com as características da hipótese que está sendo testada, tomando-se por base aquelas vigentes e utilizadas na última avaliação atuarial anual, considerando a data base dos testes, de forma a fixar as hipóteses a serem utilizadas na avaliação atuarial anual do exercício a que se referir.



2.1 TESTES RETROSPECTIVOS

2.1.1 *HIPÓTESES BIOMÉTRICAS E DEMOGRÁFICAS*

O teste retrospectivo é aplicado na verificação da aderência das hipóteses biométricas e demográficas à massa de participantes e assistidos, bem como na indicação e definição destas, a serem aplicadas nas avaliações atuariais do respectivo plano ao qual se está analisando.

O Teste de Hipótese é um procedimento estatístico que permite inferir, a partir de uma amostra, se uma dada afirmação sobre uma população é verdadeira, sendo essa afirmação denominada de hipótese. O primeiro passo de um Teste de Hipótese é definir o que será testado e, por conseguinte, declarar a hipótese nula (H_o) e a hipótese alternativa (H_a).

Se, para uma dada amostra, os resultados são diferentes dos esperados sob a hipótese nula, dizemos que existem evidências contra H_o ou ainda que essa hipótese deve ser rejeitada. Por outro lado, se os resultados da amostra não são conflitantes com a hipótese nula, dizemos que H_o não deve ser rejeitada ou que as evidências não são suficientes para sua rejeição.

A metodologia adotada pela Mercer GAMA visa analisar a aderência da hipótese sob três aspectos distintos:

1 Verificar se as tábuas testadas possuem distribuição dos eventos estatisticamente igual àquela observada na experiência do plano;

2 Verificar se as tábuas testadas apresentam, em quantidade de eventos, uma expectativa estatisticamente igual àquela observada no plano em estudo; e

3 Verificar graficamente o comportamento da série histórica dos eventos observados, comparando com os eventos esperados, de forma a verificar se há um distanciamento ou aproximação, ao longo do tempo, dos eventos esperados com os observados, bem como a verificar tendências e expectativas do comportamento da hipótese, considerando a massa de participantes e assistidos.

Tais procedimentos são utilizados objetivando dar aos resultados dos testes maior confiabilidade em relação ao comportamento da massa do plano no período analisado.

Assim, a aderência das hipóteses de mortalidade geral, entrada em invalidez, mortalidade de inválidos e rotatividade é testada pela aplicação de dois testes estatísticos distintos, observando níveis α[1] de significância ou $(1-\alpha)$ de confiança, conforme metodologias a seguir expostas.

[1] Usualmente, são adotados os níveis de 5% de significância, ou 95% de confiança.

2.1.1.1 Metodologias Estatísticas Adotadas

2.1.1.1.1 Teste de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras [2]*:*

É utilizado o Teste de Kolmogorov-Smirnov para Duas Amostras, desenvolvido por Smirnov em 1939, baseado no teste desenvolvido por Kolmogorov em 1933.

O teste de Kolmogorov-Smirnov para Aderência é indicado para testar a hipótese de que um conjunto de dados provém ou não de uma mesma distribuição. Para o caso do teste das hipóteses biométricas, a comparação é feita considerando-se a função de distribuição empírica observada e a função de distribuição teórica esperada para os valores amostrais. A estatística de teste é a maior diferença observada entre as funções.

Para realizar o teste de *Kolmogorov-Smirnov* para as tábuas testadas, utilizam-se as seguintes hipóteses:

$\mathrm{H_o}$: A tábua estudada se ajusta à distribuição dos dados.

H_a: A tábua estudada não se ajusta à distribuição dos dados.

Para aplicar o referido teste, é construída uma distribuição de frequências cumulativas para cada amostra de observações, utilizando os mesmos intervalos para ambas as distribuições, com o intuito de verificar se a distribuição dos eventos esperados, gerados pela aplicação das tábuas em estudo sobre a quantidade de expostos, é aderente aos eventos observados.

Sejam $F(x)$ e $G(x)$ as funções de distribuição de duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n e m, respectivamente. Para o cálculo da estatística do teste, considere $S_1(x)$ a função de distribuição empírica baseada na amostra de tamanho n e $S_2(x)$ a função de distribuição empírica baseada na outra amostra com m elementos. O valor da estatística D do teste de adequabilidade de *Kolmogorov-Smirnov* é dado por:

$D = \max[S_1(x) - S_2(x)]$, para o teste Unilateral[3];

A distribuição amostral de D é conhecida e a região de rejeição do teste é determinada a partir de valores tabelados. Neste caso, rejeita-se $\mathrm{H_0}$, ou seja,

[2]Conforme metodologia apresentada em *Estatística Não-Paramétrica para Ciências do Comportamento, 2º edição, Sidney Siegel e N.John Castellan, Jr.*

[3] Teste Unilateral é utilizado quando se quer testar a diferença na direção de H_a. Assim, para os testes de mortalidade testa-se a probabilidade de a distribuição empírica observada ser menor ou igual à distribuição teórica esperada. Já para os testes de entrada em invalidez, rotatividade e morbidez, a direção de $\mathrm{H_a}$ é a distribuição empírica observada ser maior ou igual à distribuição teórica esperada.

existem evidências de que as amostras pertencem a populações distintas, se a estatística D apresenta valores maiores que D tabelada.

Outra maneira de concluir acerca de um Teste de Hipótese consiste em comparar o *p-valor* calculado com o nível de significância adotado, de forma que se o *p-valor* for menor que o nível de significância (α), H_0 deve ser rejeitada.

Para o cálculo do *p-valor* podemos aproximar a distribuição amostral de D por uma Qui-Quadrado - χ^2 com 2 graus de liberdade, através da seguinte fórmula:

$$X^2 = 4D_{m,n}^2 \frac{mn}{m+n}$$

Neste caso, rejeita-se H_0, ou seja, existem evidências de que a tábua estudada não se ajusta à distribuição dos dados, se a estatística D apresenta *p-valor* inferior ao nível de significância do teste.

2.1.1.1.2 Teste Qui-Quadrado de Independência [4]

As Tábuas Biométricas e os dados populacionais referentes aos planos de benefícios avaliados são amostras independentes e os dados consistem de frequências em categorias discretas. Sendo assim, é indicado o uso do Teste Qui-Quadrado para duas amostras quando N[5] é suficientemente grande.

O teste Qui-Quadrado de Independência tem por objetivo verificar se o número de eventos gerados pela aplicação das tábuas sobre os expostos ao risco, por exemplo, óbito, entrada em invalidez ou cancelamento do Plano, é estatisticamente equivalente ao número de eventos observados no Plano nos anos anteriores ao da realização do Teste de Hipótese.

Neste estudo, o teste é utilizado para verificar **se o número de eventos gerados pela aplicação das tábuas sobre os expostos ao risco é estatisticamente equivalente ao número de eventos observados no plano de benefícios,** segundo o período de experiência.

Para realizar o teste em questão, é necessário, primeiramente, verificar se os dados observados se distribuem de forma aderente àqueles esperados com a utilização da tábua biométrica, através do Teste de Kolmogorov-Smirnov. Caso não haja indícios para rejeitar a hipótese de que a tábua é aderente, realiza-se um teste Qui-Quadrado de Independência.

---

[4] Conforme metodologia apresentada em *Estatística Não-Paramétrica para Ciências do Comportamento, 2º edição, Sidney Siegel e N.John Castellan, Jr.*

[5] N é o número total de pessoas mortas e sobreviventes no plano e na tábua. Quando N<20 deve-se utilizar o Teste Exato de Fisher. Se 20<N<40 e as frequências esperadas forem inferiores a 5 utiliza-se o Teste Exato de Fisher, do contrário pode ser utilizado o Teste Qui-Quadrado.

Este cuidado é devido ao fato de que o Teste Qui-Quadrado não verifica a hipótese de aderência da Tábua Biométrica ao Plano, sendo tal verificação realizada por meio do Teste de Kolmogorov-Smirnov, conforme explicitado no item 2.1.1.1.1.

Já havendo sido testada a aderência da Tábua Biométrica à massa populacional, utiliza-se **o Teste Qui-Quadrado de Independência para verificar se, além de a tábua ser aderente,** ou seja, possuir distribuição estatisticamente igual à distribuição da população, **o número de eventos por ela gerado é estatisticamente igual ao observado** nos anos de experiência considerados.

O objetivo é, então, verificar a independência entre duas variáveis medidas nas mesmas unidades experimentais. Desta forma, deseja-se analisar **se existe independência** entre a tábua de mortalidade testada e o número de óbitos ocorridos, conforme a experiência do plano de benefícios.

Para o referido teste consideram-se as seguintes hipóteses:

H_o: O número esperado de eventos ao utilizar a tábua estudada é estatisticamente igual ao número observado de eventos.

H_a: O número esperado de eventos ao utilizar a tábua estudada não é estatisticamente igual ao número observado de eventos.

Para aplicar o Qui-Quadrado de Independência temos que calcular o valor da estatística X^2, a qual é obtida com a aplicação da fórmula que segue:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

onde,

n_{ij}= Número observado de casos categorizados na i-ésima linha e j-ésima coluna;
E_{ij}= Número de casos esperados na i-ésima linha e j-ésima coluna quando H_0 é verdadeira;
r= Número de Linhas;
c= Número de Colunas.

Contudo, nos casos em que os dados encontram-se distribuídos em tabelas de contingência 2x2, pode-se, sem perda de precisão do teste, aplicar a seguinte equação:

$$X^2 = \frac{N(|AD - BC| - \frac{N}{2})^2}{(A+B)\times(C+D)\times(A+C)\times(B+D)}$$ [6]

onde,

A= Número de eventos observados no Plano;
B= Número de eventos esperados pela aplicação da Tábua;
C= Número de eventos não ocorridos observados no Plano;
D= Número de eventos não ocorridos gerados pela aplicação da Tábua;
N= A+B+C+D.

Definidas as hipóteses e com o valor da estatística do teste calculada, obtêm-se outras variáveis que serão levadas em consideração, quais sejam, o grau de liberdade e o nível de significância do teste.

Graus de liberdade representam a diferença entre o número de classes de resultados e o número de informações da amostra que é necessário para o cálculo dos valores esperados em cada classe. Deste modo, considerando que no modelo foi utilizada a quantidade de óbitos e sobreviventes observados, comparado com a quantidade esperada pela tábua analisada, este número é obtido com a aplicação da seguinte fórmula:

$$GL = (n^o\, linhas - 1) \times (n^o\, colunas - 1);$$

Os parâmetros da formulação acima são obtidos a partir da tabela em sequência.

	Plano	Tábua Testada
Morte	*Observadas(A)*	*Esperadas(B)*
Sobrevivência	*Observadas(C)*	*Esperadas(D)*

Por se tratar de uma tabela de contingência 2x2, o grau de liberdade será, no caso dos testes que envolvem tábuas biométricas, sempre igual a 1.

De posse dos valores do nível de significância adotado e dos graus de liberdade do modelo, obtém-se o valor da estatística χ^2_{tab} a partir da tabela de Distribuição Acumulada da Função Qui-Quadrado.

A distribuição de Qui-Quadrado é conhecida e a região de rejeição do teste é determinada a partir de valores tabelados. Neste caso rejeita-se H_0, ou seja,

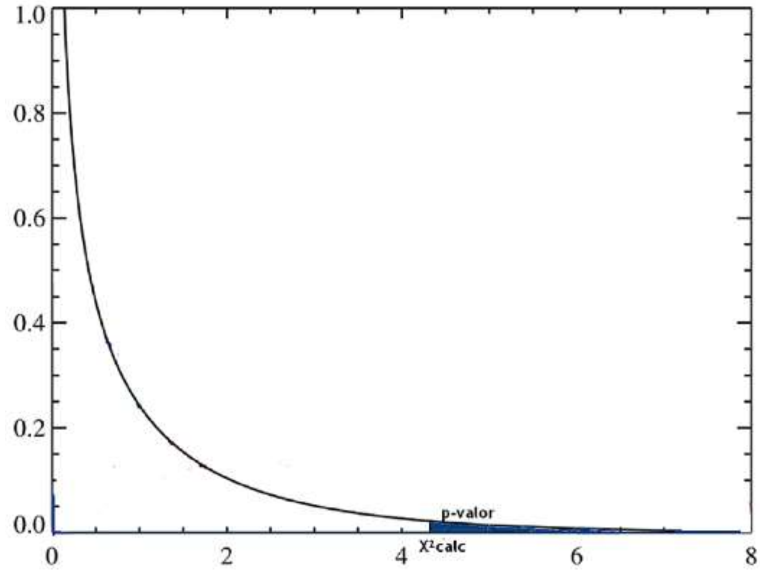
[6] Equação apresentada em *Estatística Não-Paramétrica para Ciências do Comportamento, 2º edição, Sidney Siegel e N.John Castellan, Jr.*

existem evidências de que a tábua espera um número de eventos diferente do observado se a estatística X^2_{calc} apresenta valores maiores que χ^2_{tab} calculado para o nível de significância pré-estabelecido (usualmente, α = 0,05).

Analogamente, é possível escolher a melhor Tábua dentre as testadas através do cálculo de probabilidade, *p-valor* [7]. A melhor Tábua, segundo o Teste Qui-Quadrado de independência, será aquela que apresentar o maior *p-valor*.

p-valor= *P*($\chi^2 \geq X^2_{calc}$, | H_o verdadeira)

Sabendo que o X^2 calculado aproxima-se da distribuição χ^2 com 1 grau de liberdade, tem-se o *p-valor* da tábua dado pela área sobre a curva da distribuição Qui-Quadrado tal que $\chi^2 \geq X^2_{calc}$ conforme mostrado abaixo:



Fonte: Mercer GAMA.

A área calculada é dada pela função de distribuição acumulada da distribuição Qui-Quadrado, que equivale a:

$$p - valor = 1 - F(X^2_{calc}) = \int_{X^2_{calc}}^{\infty} \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{(v/2)-1} e(-x/2)\, \partial x \ sendo\ v = 1\ g.l.$$

Quanto menor o X^2_{calc}, maior o *p-valor* da Tábua e mais indícios há de que o número de eventos por ela gerado se assemelha ao observado no plano de benefícios.

7 O *p-valor* de um teste corresponde à probabilidade de rejeitar erroneamente a hipótese nula H_o, quando a mesma é verdadeira. Dessa forma, opta-se pela rejeição da hipótese nula apenas quando a probabilidade, *p-valor*, é inferior a um nível de significância pré-estabelecido.

2.1.1.1.3 *Teste Exato de Fisher para pequenas amostras*

É importante observar que, em pequenas amostras, com frequências esperadas muito baixas em cada casela, o teste Qui-Quadrado pode não ser apropriado, visto que, nessas situações, torna-se muito difícil o cálculo do poder do teste. Dessa forma, recomenda-se a utilização do teste exato de Fisher.

O teste de probabilidade exato de Fisher é extremamente útil quando o número de eventos observado e o número esperado pela tábua são muito baixos.

A probabilidade exata de que o número observado de eventos seja semelhante ao número esperado obtido através da aplicação da tábua testada é dado pela distribuição hipergeométrica:

$$p = \frac{\binom{A+C}{A}\binom{B+D}{B}}{\binom{N}{A+B}}$$

onde,

A= Número de eventos observados no Plano;
B= Número de eventos esperados pela aplicação da Tábua;
C= Número de eventos não ocorridos observados no Plano;
D= Número de eventos não ocorridos gerados pela aplicação da Tábua;
N= A+B+C+D.

Sendo p a probabilidade de que seja verdadeira a hipótese nula do teste, qual seja, o número esperado de eventos ao utilizar a tábua estudada é semelhante ao número observado. Dessa forma, rejeita-se a hipótese nula em caso de a probabilidade obtida ser inferior a um nível de significância pré-estabelecido (usualmente, $\alpha = 0,05$).

2.1.1.1.4 *Viés de Tendência*

Índice absoluto [Observado – Esperado] que reflete a tendência de aumento ou redução dos desvios (diferença entre valores observados e esperados) ao longo do tempo, ou seja, quando comparado o índice do ano em estudo com o do ano anterior.

Quando positivo **(+)**, indica que o desvio tende a aumentar, ou seja, o valor esperado tende a se afastar do valor observado. E quando negativo **(-)**, indica que o desvio tende a diminuir, ou seja, o valor esperado se aproxima do valor observado com o decorrer do tempo.

Para a realização dos testes especificados acima, é necessário, primeiramente, definir o cálculo e determinação atuarial dos expostos ao risco.

2.1.1.2 Preparação e cálculos inicias para aplicação dos testes:

Para fins de cálculo da quantidade de eventos esperados por cada tábua, será feita uma ponderação do número de expostos ao risco[8], conforme metodologia apresentada a seguir:

$$Expostos_x^{pond} = \sum_{z=1}^{N} \frac{F_x^z + F_{x+1}^{z+1} + d_x^z}{2},$$

em que:

N = Número de anos envolvidos no estudo;

d_x^z = Número de eventos no ano z, com idade x;

$F_x^z = \psi_x^z + \lambda_x^z - \mu_x^z$;

ψ_x^z = Quantidade a observar com idade x no ano z;

λ_x^z = Quantidade a observar, com idade x, que entrou no plano no ano z;

μ_x^z = Quantidade a observar, com idade x, que saiu do plano no ano z, adicionado àqueles que vieram a falecer.

A quantidade de eventos esperados por cada tábua é calculada da seguinte forma:

$$d_x = Expostos_{pond}(ano(t)) \times q_x^t$$

Para fins de cálculo dos "expostos ao risco", serão consideradas:

- Tábuas de Mortalidade Geral: Participantes em qualquer condição no plano e Assistidos (aposentados e pensionistas) para os planos que possuam benefícios estruturados na modalidade de Benefício Definido; e somente Assistidos (aposentados e pensionistas) para os planos que possuam apenas benefícios estruturados na modalidade de Contribuição Definida, que possuem forma de cálculo do benefício que se utiliza de fator atuarial, caso o Plano possua histórico suficiente para a realização dos testes;

- Tábuas de Entrada em Invalidez: Participantes em qualquer condição no plano;

- Tábuas de Mortalidade de Inválidos: Aposentados por Invalidez; e

Tábuas de Entrada em Auxílio Doença (Morbidez): Participantes em qualquer condição no plano.

[8] Metodologia proposta por *London*, *Survival Models & Their Estimation*, 2º Ed. ACTEX.

2.1.1.3 Procedimentos

Para execução dos testes de aderência das hipóteses biométricas, os seguintes procedimentos são adotados:

1º. Aplicação do teste de *Kolmogorov-Smirnov* para duas amostras, para as tábuas de mortalidade geral, entrada em invalidez, mortalidade de inválidos, rotatividade[9] e morbidez, selecionadas para o plano em estudo, a fim de identificar a tábua mais aderente à população testada;

2º. Identificação do *ranking* de colocação das tábuas, observado o *p-valor* do teste *Kolmogorov-Smirnov*;

3º. Dentre as tábuas não rejeitadas no teste *Kolmogorov-Smirnov*, será selecionada aquela que tiver melhor posição no *ranking*, inclusive a tábua vigente (caso não tenha sido rejeitada). Então será aplicado o teste Qui-Quadrado de Independência;

4º. Observado o 3º procedimento, aplica-se o cálculo do viés de tendência; e

5º. É válido destacar que poderão ser aplicados agravamentos/desagravamentos em tábuas testadas sempre que julgado pertinente, observando o limite da AT-83[10] no caso de Mortalidade Geral.

Caso não seja possível a averiguação e aplicação de testes de aderência a alguma hipótese adotada, os testes podem ser realizados conjugando-se a massa à de outros planos com as mesmas características. Não sendo factível a realização de testes, as hipóteses adotadas por outros planos de benefícios nos quais esses testes forem possíveis, poderão ser tomadas como parâmetro.

---

[9] A rotatividade poderá ser testada de três maneiras diferentes. A metodologia do N Balizador, item 2.1.3.1. desta nota técnica, define se a rotatividade será testada pelo teste de *Kolmogorov-Smirnov* ou pela desigualdade de *Tchebycheff*. Ainda, quando verificada a impossibilidade de realização do teste através de alguma dessas metodologias, é indicada a aplicação do teste de hipóteses para diferença de médias e proporções.

[10] As expectativas de vida geradas com as tábuas agravadas/desagravadas não poderão ser inferiores àquelas geradas pela AT-83, observado o sexo ou a proporção dos sexos, conforme os dados disponibilizados. Além disso, em Planos com destinação de superávit, as expectativas de vida não poderão ser inferiores àquelas geradas pela Tábua AT-2000 (Suavizada em 10%).

2.1.2 *HIPÓTESES ECONÔMICAS E FINANCEIRAS*

2.1.2.1 Hipótese de Crescimento Real dos Salários

A hipótese de crescimento real dos salários expressa a variável salarial na forma de taxa, que é utilizada para projetar os salários ao longo da vida laborativa e possui duas funções:

a) Estimar o salário do Participante, para o período de cálculo dos benefícios, de forma a projetar o benefício devido na data em que o mesmo lhe for concedido; e

b) Estimar as contribuições futuras, pelo tempo em que o Participante permanecerá no Plano nesta condição.

2.1.2.1.1 Análise por Modelos de Regressão

Este procedimento consiste em estabelecer uma escala salarial através de uma relação matemática entre a variável resposta (y), qual seja, Salário de Participação e possíveis variáveis explicativas (x), como idade e tempo de empresa, desde que estas estejam disponíveis, tomando-se por base os dados cadastrais usados na avaliação atuarial:

$$f(y) = g(x)$$

Considerando as variáveis acima, testa-se o ajuste de três modelos de regressão, quais sejam, regressão logística não linear, regressão linear e regressão exponencial, observando os preceitos de cada modelo.

- **Regressão Logística Não Linear**

Os modelos não lineares podem ser escritos da forma:

$$Y = g(\beta; X) + \varepsilon_i \;,$$

em que, $g(\beta; X)$ é uma função não linear, ε_i's são erros não correlacionados, com distribuição normal, média zero e variância constante σ^2, isto é, ε_i ~ N(0; σ^2), □(□) = $g(\beta; X)$ é uma função diferenciável em □□□□□ = (□$_1$; ...;□$_p$)^T contém os parâmetros desconhecidos a serem estimados e X = (x$^{(1)}$;...;x$^{(s)}$) representa a matriz, de dimensões *n* x *s*, dos valores de *s* variáveis explicativas.

Em consonância à correlação (dependência) observada entre a variável resposta (y) e a variável explicativa (x), pode-se afirmar, sem perda de generalidade, que essa ligação é feita através de um modelo logístico. Logo, para ajuste do modelo de crescimento salarial, utiliza-se um modelo de regressão não linear, considerando o modelo logístico expresso da seguinte forma:

$$Y_i = s.i_1 + \frac{\beta_1}{1+\exp\left(\frac{\beta_2 - x_i}{\beta_3}\right)} + \varepsilon_i \,,$$

onde:
Y_i = salário médio estimado para cada nível i;
s.i = salário médio em x_1;
β_1, β_2 e β_3 = parâmetros a serem estimados;
x_i = variável explicativa;
ε_i = erro associado ao ajuste.

Esse modelo difere do logístico padrão devido à variável salário inicial ($s.i$), incluída através de uma constante fixa.

- **Regressão Exponencial**

Quando a dependência entre a variável resposta e a variável explicativa possui formato exponencial, o seguinte modelo pode ser utilizado:

$$Y_i = \alpha \exp(\beta x_i) + \varepsilon_i \,,$$

onde:
Y_i = salário médio estimado para cada nível i;
α, β = parâmetros a serem estimados.
x_i = variável explicativa;
ε_i = erro associado ao ajuste.

- **Regressão Linear Simples**

Outra forma de análise regressiva muito utilizada é a regressão linear simples, modelo que considera que a relação da resposta às variáveis é uma função linear de alguns parâmetros, sendo definido por:

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \,,$$

em que:
Y_i = salário médio estimado para cada nível i;
α = constante que representa o intercepto;
β = coeficiente angular;
x_i = variável explicativa;

ε_i = erro associado ao ajuste.

Esses modelos que dependem de forma linear dos seus parâmetros desconhecidos, possuem ajustes mais simples que os modelos não-lineares, além de possuírem propriedades estatísticas mais fáceis de serem determinadas.

- **Procedimentos**

Primeiramente, deve-se identificar a existência de observações discrepantes ao conjunto de dados, os chamados *outliers*, cuja identificação pode ser verificada através da análise do gráfico *box-plot*. A identificação e exclusão desses *outliers* permite uma melhor suavização da curva salarial e, assim, melhor estimação dessa função, bem como não compromete a premissa de resíduos normalmente distribuídos. Feito isto, os dados estão aptos a serem modelados.

Após realizar os ajustes dos modelos, verifica-se a adequabilidade de cada um. Com a finalidade de avaliar o melhor modelo, calcula-se o coeficiente de determinação (R^2), que se trata de uma medida relativa de adequação do ajuste que varia entre 0 e 1, sendo igual a 1 no caso de um ajuste perfeito. Assim, aquele modelo que melhor explica a variável resposta, ou seja, aquele que possui maior coeficiente de determinação é utilizado para estimar o salário médio, sendo que este modelo deve ser considerado explicativo, ou seja, deve possuir um coeficiente de determinação alto.

Definido o modelo que será utilizado e de posse do valor de cada um dos parâmetros do mesmo, esses devem ser testados individualmente e em conjunto, aplicados ao modelo, utilizando-se os testes a seguir:

O Teste *t-student* é usado para determinar se os parâmetros da amostra são significativamente diferentes dos parâmetros hipotéticos da população, sendo desconhecido o desvio-padrão da população. Assim, a validade dos parâmetros é dada por meio de teste de hipótese, para um nível de significância pré-estabelecido (usualmente, de 5%):

$$\begin{cases} H_0 : \beta_k = 0. \\ H_a : \beta_k \neq 0 \end{cases}$$

em que k varia de acordo com o número de parâmetros estimados em cada modelo.

Se o *p-valor* do teste t for maior que o nível de significância pré-estabelecido (usualmente, 5%), não se rejeita a hipótese nula, ou seja, conclui-se que os valores dos parâmetros sejam nulos. Caso contrário, rejeita-se a hipótese de que os valores dos parâmetros β_k sejam nulos, cabendo a esse o valor da estimativa.

Testados cada um dos parâmetros do modelo e estando esses válidos, o próximo passo é verificar a aderência do modelo ajustado. Para isso, analisa-se a tabela ANOVA.

O Teste de F de *Snedecor* tem por finalidade testar o efeito conjunto das variáveis explicativas sobre a variável dependente. Isso significa verificar se, pelo menos, uma das variáveis explicativas do modelo exerce, efetivamente, influência sobre a variável dependente.

Em geral, o teste da significância global da regressão indica se o modelo, como um todo, está bem ajustado.

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{k-1} = 0 \ (\text{não há correlação entre a variável resposta e a explicativa}) \\ H_a : \text{pelo menos um } \beta_k \text{ é diferente de zero } (\text{há correlação}). \end{cases}$$

Dessa forma, se o *p-valor* do teste F for maior que o nível de significância pré-estabelecido, não há evidências para rejeitar a hipótese nula, ou seja, conclui-se que não há correlação entre a variável resposta e a variável dependente, caso contrário rejeita-se a mesma.

Assim, diante da análise do *p-valor* das estatísticas *t* e *F*, comprova-se a validade do modelo ajustado e, após analisar os resíduos e verificar que não comprometem a validade do modelo, pode-se prosseguir e estimar a taxa média de crescimento real de salários. Caso o modelo escolhido não seja validado, o procedimento é ajustar o outro modelo que tenha apresentado maior R^2, contanto que este modelo também possa ser considerado explicativo. Na sequência, aplicam-se os mesmos procedimentos para verificar sua validade.

2.1.2.1.2 *Análise pela Decomposição de Salários e Idade*

A metodologia de Decomposição Salarial é utilizada quando **não** é possível estimar o salário médio a partir do ajuste de modelos de regressão.

Essa metodologia origina-se no cálculo da idade atual, na data da análise, dos participantes, considerando o intervalo entre a data de nascimento e a data base do exercício utilizado.

Com base na data de admissão dos participantes da patrocinadora, o tempo de serviço dos participantes é determinado, considerando o intervalo entre a data de admissão e a data base do exercício.

A partir do tempo de serviço dos participantes, calcula-se os salários médios, iniciais e finais com base nos salários de participação individuais, compostos das parcelas do salário base, gratificações, quinquênios e demais parcelas formadoras do salário de participação, conforme informados pela Entidade, e as respectivas frequências em função das idades, observadas as faixas de contribuições para o Plano, em que se considera:

- j=1: Salários até 0,5 Teto de Contribuição utilizado pelo Plano - TC[11];
- j=2: Salários entre 0,5 e 1 Teto de Contribuição utilizado pelo Plano - TC;
- j=3: Salários acima de 1 Teto de Contribuição utilizado pelo Plano - TC.

Para fins do resultado, calcula-se a Taxa Média resultante da Função de Crescimento Salarial, com base nas estatísticas apuradas do exercício, dos empregados da patrocinadora. Após a elaboração das estatísticas iniciais, obtém-se a Função de Crescimento Salarial – *S(x)* por idade, observado o mínimo etário para aposentadoria do plano de benefícios, ao longo da carreira ativa do Participante, de forma que esta função represente o crescimento salarial da idade na data de avaliação até a data do evento (no caso, a aposentadoria), elaborando a função salarial:

$$S(x) = \sum_{j=1}^{3} mj_{(x)} \times sj_{(x)}$$

com:

$$mj_{(x)} = Mji + \frac{Mji - Mjf}{n} \times fn;$$

$$Sj_{(x)} = Sji + \frac{Sji - Sjf}{n} \times fn;$$

em que:

- Mji: Frequência relativa dos participantes iniciais com salários de participação j, em relação a todos os participantes iniciais;
- Mjf : Frequência relativa dos participantes finais com salários de participação j, em relação a todos os participantes finais;
- Sji: Salário de participação médio dos participantes iniciais com salários de participação j; e
- Sjf : Salário de participação médio dos participantes finais com salários de participação j.

[11] Teto de Contribuição na data base dos dados. Para os Planos que não possuem teto de contribuição, utiliza-se o Teto de Contribuição do INSS.

Considerando, ainda:

- n: tempo de desenvolvimento total dado pela diferença entre a idade média dos finais e a idade média dos iniciais, ou seja, o tempo médio de plano entre a idade média de adesão e a idade média de aposentadoria;

- fn: função de desenvolvimento, entre a idade inicial e a final, sendo desenvolvido de ano a ano.

Na busca por um valor único para representar a hipótese de crescimento real de salário para os participantes "ativos" empregados das patrocinadoras, adotou-se a média dos valores por idade, ponderada pelo produto da frequência de empregados em cada faixa etária pelo respectivo salário de participação médio. A fim de calcular a taxa de crescimento salarial, **consideremos Y(x) = S(x).**

$$Cs\% = \sum_{x}^{n} \frac{(Folha_x \, x \, TxAnual_x)}{\sum_{x}^{n} Folha_x} \times 100 \qquad TxAnual_x = \left(\frac{S(r)}{S(x)}\right)^{\frac{1}{n}} \times 100$$

- **Cs%:** Crescimento Salarial em percentual anual;
- **Folha**: Soma dos salários em cada nível de x;
- **n**: n=x-r, diferença entre a idade atual e a da aposentadoria;
- **r**: Idade na Aposentadoria Programada;
- **x**: Idade do Participante.

2.1.2.1.3 Crescimento Médio Salarial

Nos casos em que a massa do Plano em estudo é pouco expressiva, não sendo possível utilizar as metodologias anteriores, utiliza-se a metodologia de Crescimento Médio Salarial. Essa metodologia consiste em dimensionar a evolução salarial individual e calcular uma média que reflita o cenário médio de crescimento real anual para a massa de Participantes.

De posse dos salários dos Participantes nas Avaliações Atuariais do Plano, é analisado o crescimento salarial de cada participante entre dois exercícios, considerando-se todo o período histórico disponível:

$$C_{ia}\% = \left(\frac{S_{i,n}}{S_{i,n-1}} - 1\right)$$

- $\boldsymbol{C_{ia}}\%$*:* Crescimento Salarial Individual em percentual por ano, considerando os anos utilizados no teste;

- $\boldsymbol{a}$: ano do estudo, a = ano de início do estudo até o ano base do estudo

- $\boldsymbol{S_n}$: Salário no ano de cálculo comparativo;

- $\boldsymbol{i}$:Identificação do participante, i=1,.... x (total de participantes)

Na intenção de dimensionar a evolução salarial individual e transformá-la em uma média anual que reflita um cenário médio de crescimento real dos salários para essa massa de Participantes, calcula-se a variação média dos participantes ano a ano:

$$\overline{C_a}\% = \frac{\sum C_{ia}\%}{x}$$

- $\boldsymbol{\overline{C_a}}\%$**:** Crescimento Salarial por ano em percentual, considerando os anos utilizados no teste;

- $\boldsymbol{x}$: quantidade de participantes considerados no teste;

Considerando a variação total salarial entre o primeiro ano de estudo e o da data-base do estudo, e retirando-se a inflação do período, obtemos uma taxa média de crescimento do período, ponderando-se esta pela quantidade de anos do estudo, obtemos a taxa média de crescimento salarial.

$$C_{i,t}\% = variação\left(S_{final}; S_{inic}\right) - inflação$$

$$C_t\% = \left[1 + \left(\,média(C_{i,t}\%)\right)\right]^{1/n-1} - 1$$

- $\boldsymbol{C_{it}}\%$ ***:*** Crescimento salarial individual total

- S_{final}: $Salário\ Final$

- S_{inic}: $Salário\ Inicial$

- $C_t\%$: Crescimento total

- n: Quantidade de anos utilizado no estudo

2.1.3 HIPÓTESES DEMOGRÁFICAS

2.1.3.1 Hipótese de Rotatividade

O teste de rotatividade é realizado considerando o número de eventos como sendo os Participantes que se desligaram do Plano e efetuaram Resgate ou Portabilidade.

Para fins de execução do teste de aderência da hipótese de rotatividade apresentado neste Relatório, pelo método retrospectivo, utiliza-se a metodologia conforme resultado apontado pelo teste do ***(n)*** **Balizador**.

O teste do (n) Balizador baseia-se em desconsiderar o risco de um evento atípico dentro de uma empresa, que poderia comprometer o resultado do teste de rotatividade, em face ao grande número de Participantes expostos, posto que esse risco é diluído neste número de Participantes e pode ser absorvido, afirmando com **95% de confiança**, sem risco de desequilíbrio no Plano pela escolha desta hipótese.

O teorema de Bernoulli resulta da aplicação da desigualdade de *Tchebycheff* à variável aleatória *f*, associada ao esquema de provas repetidas de *Bernoulli*.

Considerando que: $m = E(f) = np \text{ e } \sigma = D(f) = \sqrt{npq}$, a desigualdade dá, então: $P(|\ f - np\ | > K\sqrt{npq}) < \frac{1}{K^2}$.

Onde:

f = Variável aleatória;
p = Proporção média de desligamento no período observado;
q = (1-p).

Se aplicado o teorema de *Tchebycheff* à frequência relativa $\left(\frac{f}{n}\right)$, temos:

$$E\left(\frac{f}{n}\right) = \frac{1}{n}E(f) = p \ ;$$

$$D\left(\frac{f}{n}\right) = \frac{1}{n}D(f) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$ e, então,

$$P\left(\left|\frac{f}{n} - p\right| > K\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) < \frac{1}{K^2} \ . \qquad (1)$$

Na prática, o limite superior da probabilidade de $|(f/n) - p|$ ser superior a uma quantidade positiva ω dada é conhecido. Há que resolver, então, a equação $\left(K\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \varpi$ com relação a *K*, que resulta na seguinte equação:

$$k = \varpi\sqrt{\frac{n}{pq}} \text{ ; e } \frac{1}{k^2} = \frac{pq}{n\varpi^2}.$$

A desigualdade (1) converte-se, então, em:

$$P\left(\left|\frac{f}{n} - p\right| > \varpi\right) < \frac{pq}{n\varpi^2}.$$

Desta forma, para calcularmos o **(*n*) Balizador**, substituiremos a variável ϖ pela probabilidade p de desligamento, resultando em:

$$P\left(\left|\frac{f}{n} - p\right| > p\right) < \frac{pq}{np^2}, \tag{2}$$

em que $P\left(\left|\frac{f}{n} - p\right| > p\right) < \frac{1}{K^2}$ e, assim, temos

$$K^2 < \frac{1}{P\left(\left|\frac{f}{n} - p\right| > K\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)}.$$

Considerando $P\left(\left|\frac{f}{n} - p\right| > K\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \frac{1}{K^2} = 0{,}05$, observamos que:

$K^2 = \frac{1}{0{,}05}$, resultando em $K = \sqrt{\frac{1}{0{,}05}}$. Substituindo em (2), temos $\frac{1}{K^2} = \frac{pq}{np^2}$. Desta fórmula obtemos o ***(n)* Balizador**, qual seja: $n = \frac{K^2 pq}{p^2}$.

Desta forma, para **(*n*) Balizador superior ao número médio de Participantes observados no período**, utiliza-se a metodologia de ***Tchebycheff*** para o teste de rotatividade, item **2.1.3.1.1**. Caso contrário, se o **(*n*) Balizador for inferior ao número médio de Participantes observados no período**, utiliza-se a metodologia constante no item **2.1.1.1, subitens 2.1.1.1.1. 2.1.1.1.2 , 2.1.1.1.3 e 2.1.1.1.4.**

2.1.3.1.1 Teorema de Tchebycheff

O teorema ou a desigualdade de *Tchebycheff* define um limite superior à probabilidade de uma variável aleatória *X* qualquer apresentar, com relação à sua média *m*, um desvio superior, em valor absoluto, a um certo número *k* de vezes o desvio-padrão σ.

Consideremos, portanto, a probabilidade P(|X – m| > K σ), em que K é um parâmetro positivo. Sendo o evento considerado idêntico à "soma" dos eventos incompatíveis X < |m – K σ| e X > |m + K σ|, tem-se:

$$P(|X - m| > K\sigma) = P(X < m - K\sigma) + P(X > m + K\sigma) \tag{3}$$

A fórmula acima é utilizada para obtermos a probabilidade da variável aleatória *X* ser inferior ou superior a *K* desvios padrão além da média. Ou seja, calcula-se a probabilidade *p* de que a variável aleatória *X* não pertença ao intervalo $[m + K\sigma ; m + K\sigma]$.

Essa probabilidade pode ser dada através da expressão do Teorema de Tchebycheff:

$$P(|X - m| > K\sigma) < \frac{1}{K^2}. \tag{4}$$

O limite superior K^2 é válido para qualquer que seja a distribuição da variável aleatória *X* (desde que *m* e σ existam). Evidentemente, pode-se obter o valor exato desta probabilidade, desde o momento em que se conheça a distribuição de *X*.

A probabilidade do evento complementar l X – m I $\leq$ Kσ tem como limite inferior 1 – K^2.

$$P(|X - m| \leq K\sigma) > 1 - \frac{1}{K^2} \tag{5}$$

Essa desigualdade é estabelecida facilmente a partir de (4).

Na prática, frequentemente é necessário procurar o intervalo no qual se espera que *X* cairá. A expressão (5) fornece uma solução a este problema. Basta escolher *K* de maneira que o segundo membro atinja o nível de confiança $(1-\alpha)$ desejado. É necessário, então, resolver a adequação em *K*:

$$1 - \frac{1}{K^2} = (1 - \alpha), \tag{6}$$

que tem por solução:

$$K = \sqrt{\frac{1}{1-(1-\alpha)}}. \tag{7}$$

Logo, o parâmetro *K* é dado por $K = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$.

Dessa forma, obtém-se o parâmetro *K* que, aplicado à fórmula (5), indicará a probabilidade de que a proporção de desligamentos esteja dentro do intervalo $[m - K\sigma; m + K\sigma]$.

Assim, é possível afirmar, com (1-α)% de confiança, que a taxa média de cancelamentos encontra-se dentro do intervalo $[m - K\sigma; m + K\sigma]$.

Observação: as propriedades (4) e (5) somente são interessantes se K > 1. Para 0 < K < 1, não oferecem nenhum interesse, pois toda probabilidade é necessariamente um número compreendido entre 0 e 1.

2.1.3.1.2 Teste de Hipóteses para diferença de médias e proporções

O teste de Comparação de duas proporções analisa se há diferença significativa entre a proporção de eventos observados e a proporção de eventos esperados pela tábua testada.

Consideremos, portanto, x_1 o número de desligamentos ocorridos e x_2 o número de desligamentos esperados de acordo com a tábua testada e n_1 e n_2 e número de ativos do Plano, tem-se:

$$\hat{p}_1 = x_1 / n_1 \qquad \hat{p}_2 = x_2/n_2$$

Para realizar o teste para diferença de proporções entre o número de eventos ocorridos e esperados pelas tábuas testadas, utiliza-se as seguintes hipóteses:

$$H_0 = p_1 = p_2$$
$$H_a = p_1 \neq p_2$$

Para duas amostras grandes e independentes, de tamanhos n_1 e n_2, respectivamente, as suas proporções de amostras, $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$, possuem distribuição aproximadamente normal, com médias p_1 e p_2, proporções de desligamentos, e desvios-padrão $\sqrt{p_1 q_1/n_1}$ e $\sqrt{p_2 q_2/n_2}$, respectivamente.

A estatística de teste então utilizada é dada por:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_1} + \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_2}}},$$

onde:

$\hat{p} =$ proporção média de desligamentos ocorridos no exercício e desligamentos esperados pela tábua testada; e

n_1 = n_2= número de ativos no Plano.

2.1.3.2 Hipótese de Custo de Pensão

A composição familiar é utilizada no cálculo das Provisões Matemáticas de Benefícios a Conceder quando o plano de benefício prevê pagamento de pensões, em função deste benefício estar vinculado ao número e idade dos dependentes. A composição familiar de um participante é composta pelos dependentes que tiver direito a pensão na data do óbito do participante ou do assistido, podendo ser dependentes com direito a rendas vitalícias e rendas temporárias, na forma contemplada no Regulamento do Plano.

2.1.3.2.1 Teste de hipóteses para diferença de médias e proporções

A hipótese nula (H_0) usualmente testada é a de que as duas amostras tenham sido obtidas de populações com médias iguais, ou seja, $(\bar{X} - \mu) = 0$.

$$H_0: \bar{X} = \mu$$
$$H_a: \bar{X} \neq \mu$$

A distribuição normal para duas amostras independentes é utilizada sempre que σ (desvio padrão da população) for conhecido, ou as variâncias populacionais conhecidas (σ^2).

Utiliza-se a distribuição t-Student se σ for desconhecido, ou seja, quando o desvio padrão da amostra for conhecido e não o da população, sendo assim, variâncias desconhecidas (σ^2). O uso da distribuição de Student (t) leva em conta se as variâncias populacionais são equivalentes ou diferentes.

Entretanto, em casos de amostras grandes (recomenda-se n≥30), é possível aplicar o Teorema Central do limite e utilizar a distribuição normal. Ainda, ao aplicar o Teorema Central do Limite utiliza-se o desvio padrão amostral *s* em substituição ao desvio padrão populacional σ, no caso de este ser desconhecido.

Assim, testa-se a igualdade entre a média vigente e aquela obtida através da base populacional:

$$z = \frac{(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Ainda, conforme hipóteses utilizadas, testa-se a igualdade de proporção, a fim de averiguar a igualdade entre a proporção vigente de participantes/assistidos que possuem dependentes e aquela calculada na base de dados. Ou seja, as hipóteses testadas são:

$$H_0 = \hat{p} = p$$
$$H_a = \hat{p} \neq p$$

Sabe-se que a distribuição normal é uma aproximação conveniente da distribuição binomial, caso $\mathrm{np} \geq 5$ e $\mathrm{nq} \geq 5$, onde p = proporção vigente de participantes/assistidos que possuem dependentes e $q = 1 - p$. Caso possa ser aplicada a aproximação pela distribuição normal, a média e o desvio padrão são dados por $\mu = \mathrm{np}$ e $\sigma = \sqrt{\mathrm{pq/n}}$.

A estatística de teste então utilizada é dada por:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}},$$

onde:

n= número de participantes/assistidos;

$\hat{p}$ = proporção de participante/assistidos que possuem dependentes cadastrados.

2.1.3.2.2 *Composição Familiar – Encargo Médio de Herdeiros*

Para testar a aderência da hipótese do custo médio padrão de pensão, no que se refere ao fator de renda "Hx", baseia-se em dados observados, constantes dos cadastros de dependentes integrantes das famílias dos participantes ou de assistidos.

Com base nos dados dos atuais pensionistas do plano foi determinado, para cada idade, o número de óbitos, número de dependentes vitalícios, número de dependentes temporários e as respectivas idades na data do óbito do participante e assistido.

Calcula-se o encargo médio observado, para cada idade, com base nos cálculos atuariais, frequência de mortes e idades médias de dependentes e o correspondente "Hx" médio resultante, de acordo com a formulação:

$$H_x = \frac{\sum_{x}^{\omega} a^{(12)}_{\overline{21-z_1|}} + {}_{21-z_1}a_y^{(12)}}{N_x}$$

Sendo,

x = idade do participante na época zero, em que se faz a avaliação;

y = idade do segurado vitalício, na época zero, quando se faz a avaliação;

z_1= idade do "filho mais jovem" do participante, na época zero, justamente quando se faz a avaliação; e

N_x = número de participantes de idade x.

2.2 TESTES PROSPECTIVOS

O teste prospectivo é aplicado na verificação da aderência das hipóteses da taxa de juros ao plano, bem como na indicação e definição destas, a serem aplicadas nas avaliações atuariais do respectivo plano que está sendo analisado.

2.2.1 TAXA DE JUROS

A taxa de juros é utilizada com o pressuposto de que a parcela do custo do benefício avaliado será coberta pelas receitas de aplicações dos capitais (ativos de investimentos do Plano) no mercado, referente ao patrimônio acumulado, de tal sorte que gere um retorno financeiro ou rentabilidade real igual ou acima do índice de reajuste dos benefícios do Plano, equivalente à taxa de juros técnicos.

Com o intuito de verificar a adequabilidade dessa hipótese no Estudo Prospectivo, considera-se a composição objetiva do Ativo do Plano, bem como o retorno anual esperado da carteira de Ativos no prazo correspondente ao fluxo de caixa do passivo, posicionadas na data base dos testes.

Conforme determina a Resolução MPS/CGPC nº 18/2006, alterada pela Resolução MPS/CGPC n° 15/2014, vigente a partir do exercício de 2015, *"a EFPC poderá adotar taxa de juros real anual limitada ao intervalo compreendido entre 70% (setenta por cento) da taxa de juros parâmetro e 0,4% (quatro décimos por cento) ao ano - a.a. acima da taxa de juros parâmetro"*. A Entidade, ainda deve determinar os limites impostos para a taxa de juros do Plano de Benefício de acordo com sua *duration*, observada a Portaria PREVIC nº 375, de 17 de abril de 2017.

A demonstração da convergência da taxa de juros ocorre por meio da apuração da Taxa Interna de Retorno – TIR da rentabilidade real gerada pelo fluxo de caixa dos ganhos financeiros do Plano, sendo que esse fluxo considera:

1) o Patrimônio de Cobertura do Plano na data base;

2) o fluxo atuarial de receitas e despesas [12];

[12] Os fluxos são projetados considerando as expectativas de contribuições normais e extraordinárias além das previsões de pagamentos de benefícios, inclusive os de risco, projeções essas obtidas através da utilização das premissas e hipóteses atuariais do Plano.

3) a política de investimentos do plano, especialmente a alocação objetivo de cada segmento de aplicação até o prazo da *duration* do Passivo; e

4) as rentabilidades projetadas, expressas em taxas reais anuais, de responsabilidade da Entidade, informada por segmento de aplicação.

Utilizando-se das rentabilidades projetadas e da alocação objetivo de cada segmento obtém-se a rentabilidade média anual do plano através de média ponderada, conforme equação a seguir:

$$RentabilidadeMédia = \sum_{i} \eta_i p_i$$

Onde

i: Segmento de Ativo do plano;
η_i: Rentabilidade líquida projetada pela EFPC para o Plano por segmento i;
p_i: Alocação objetivo por segmento i.

O conceito da Taxa Interna de Retorno - TIR consiste na determinação de uma taxa de desconto que iguala o valor presente de receitas e despesas de um fluxo de caixa.

A seguir, demonstramos a formulação do fluxo de caixa utilizado para a determinação da TIR:

$$P_0 = \frac{P_{Duration}}{(1+TIR)^{Duration}} + \sum_{t=1}^{Duration} \left\{ \frac{MÉDIA[D_t - R_t; (D_t - R_t) \times (1+\gamma_t)]}{(1+TIR)^t} \right\}$$

Onde:

- P_0 é o patrimônio de cobertura do Plano na data base;
- $P_{Duration}$ é o patrimônio de cobertura do Plano projetado para a *duration* considerando receitas e despesas previdenciais do Plano e a rentabilidade líquida projetada dos investimentos;
- D_t é a despesa previdenciária do Plano para pagamento de benefícios e resgate projetada no tempo t;
- R_t é a receita previdenciária do Plano com contribuições projetadas no tempo t;
- *t*= 1,..., *Duration; e*
- γ_t é a rentabilidade projetada no tempo t.

Portanto, a TIR calculada representa a taxa real de juros a ser utilizada nas projeções atuariais de tal forma a igualar o valor do patrimônio de cobertura na data base ao valor presente do fluxo de caixa de receitas e despesas e do patrimônio projetado ao final do período de análise, atendendo desta forma as ponderações aos fluxos de contribuições e despesas previdenciais totais.

Em alguns casos, a Entidade poderá solicitar o cálculo do intervalo de confiança dentro do qual seja possível afirmar que a taxa de juros estará contida. Para isso, a Entidade deverá informar o desvio padrão amostral, obtido com base nas experiências observadas de rentabilidade do plano. De posse dessa informação, assumindo que a taxa de juros aproxima-se da distribuição normal, é possível calcular um intervalo inferior e superior de tal forma que, com (1-α)% de confiança, seja possível afirmar que a taxa de juros real estará contida.

$$IC = LI < i < LS$$

Sendo:

$$LI = \bar{X} - z_{\alpha} dp$$
$$LS = \bar{X} + z_{\alpha} dp$$

Onde:

$\bar{X}$: taxa de juros resultante do teste;
dp: risco da rentabilidade projetada, sendo utilizado no estimador do risco médio o desvio padrão da amostral;
z_{α}: Valor crítico da distribuição Normal para um nível de significância α.

Por fim, considerando o desvio observado das rentabilidades (risco), conforme disponibilizado pela Entidade, é possível calcular a probabilidade de que a taxa de rentabilidade supere a taxa de juros do passivo, considerando a função de distribuição acumulada, dada pela aproximação para a normal, conforme a seguir:

$$Probabilidade = 1 - F(i)$$

Sendo:

i = taxa de juros do passivo;
$F(i)$ = Função de distribuição acumulada da distribuição Normal, sendo $i \sim N(RentabilidadeMédia,\ Risco)$

2.2.2 FATOR DE CAPACIDADE

Na avaliação atuarial, trabalha-se com uma série de fatores definidos em moeda corrente, tais como: salário, benefícios, salário mínimo, teto de contribuição, entre outros. No entanto, tais fatores não devem ser aplicados diretamente sobre valores nominais, devido a distorções criadas pela inflação à época dos reajustes.

Para refletir o impacto da inflação nesses valores monetários, foi utilizado o conceito de capacidade, que consiste em determinar o valor médio real entre duas datas base de reajustes desses valores e a data da avaliação atuarial, vinculados à moeda inflacionária. No cálculo da capacidade, são considerados a época, a frequência e o valor dos reajustes efetuados para recomposição das perdas.

O fator de capacidade anual é determinado por:

$$Fc = \frac{\sum_{m=0}^{k-1}\left[\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{m}{k}} \cdot \left(\frac{1}{1+j}\right)^{\frac{m}{k}}\right]}{\sum_{m=0}^{k-1}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{m}{k}}},$$

em que,

k = 12, representando o número de meses entre um reajuste e outro;
$m = 0...(k-1)$, representa a contagem de numero de meses;
i = taxa de juros técnicos de desconto adotados na avaliação atuarial;
j = Taxa de inflação anual.

2.2.3 *HIPÓTESE DE CRESCIMENTO REAL DOS SALÁRIOS*

A hipótese de crescimento real dos salários expressa, na forma de taxa, a variável salarial, sendo que é utilizada de forma a estimar o salário do Participante, para o período de cálculo dos benefícios, visando projetar o benefício devido na data em que o mesmo lhe for concedido, ou na data mais próxima possível do evento, bem como para estimar as contribuições futuras, pelo tempo em que o Participante permanecer no plano de benefícios.

O procedimento prospectivo consiste em uma análise do Plano de Cargos e Salários do Patrocinador, buscando determinar qual o cargo e salário do Participante quando da aposentadoria, objetivando calcular uma taxa média para o crescimento salarial.

Com base em definições da Patrocinadora, através do Plano de Cargos e Salários, gratificações por cargo e definições quanto à antecipação de promoções durante a carreira, é estimada à quantidade de reajustes por antiguidade e promoções que uma pessoa irá receber até uma data prevista de aposentaria. Com base no PCS, é determinado o salário da pessoa ao fim da carreira. Ainda, com base em definição da patrocinadora quanto a reajustes coletivos, é calculado o número de reajustes que o Participante receberá, assim como gratificações, caso houver, e o devido reajuste é aplicado no salário do Participante, obtendo-se, assim, um salário final para cada Participante do Plano.

O número de reajustes gerais, por antiguidade e de promoções é calculado através da seguinte expressão:

$$N_x = TSF/x$$

Onde:

x é o tempo para promoção, reajuste por antiguidade ou reajuste geral;
TSF é o tempo de serviço futuro

Após a definição do salário de cada Participante na data-base do teste e na data provável de aposentadoria, é calculado o percentual de crescimento salarial médio individual através da seguinte expressão:

$$Cm = \left(\frac{U}{K}\right)^{\frac{1}{N}} - 1$$

Onde:

Cm = crescimento médio
U = Salário final
K = Salário inicial utilizado no estudo
N = tempo de serviço futuro

A taxa média de crescimento salarial a ser aplicada ao Plano é calculada através da média ponderada entre o crescimento individual e o salário final de cada Participante. Vale ressaltar que todo o procedimento acima descrito é calculado em termos reais, ou seja, consideram-se, apenas, os reajustes acima da inflação.

Ainda, considerando que ao encontrar a taxa média de crescimento salarial não julgamos qual a possível magnitude do erro que estamos cometendo, verificamos a importância da construção de um intervalo de confiança.

O intervalo de confiança nada mais é do que uma amplitude (ou um intervalo) de valores que tem probabilidade de conter o verdadeiro valor da variável, neste caso, da taxa de crescimento salarial. Ele está associado a um grau de confiança que é uma medida da nossa certeza de que o intervalo contém o parâmetro populacional. A escolha do grau de confiança é por parte do pesquisador, sendo comum utilizar 90%, 95% e 99%.

Desse modo, para a taxa de crescimento salarial utilizamos um intervalo de confiança definido como:

$$\boldsymbol{\overline{x} - E < \overline{x} < \overline{x} + E}$$

Onde:

$\boldsymbol{\overline{x}}$ = *taxa média de crescimento salarial*
$\boldsymbol{E}$ = *Erro amostral*

O Erro amostral depende da variância e do tamanho da amostra. Se a variância populacional (σ^2) não for conhecida, utilizamos a variância amostral (S^2). Para amostra grande, de ordem de 100, utilizamos a distribuição normal, caso contrário, utilizamos a distribuição *t* de *Student*.

O Erro amostral é definido como:

$\boldsymbol{E} = \; z\alpha/_2 \; \frac{S}{\sqrt{n}}$, *, se a variância populacional for conhecida*

$\boldsymbol{E} = \; t\alpha/_2 \; \frac{S}{\sqrt{n}}$*, se a variância populacional for desconhecida.*

Onde:

$z\alpha/_2$ *e* $t\alpha/_2$ *= valor tabelado correspondente ao nível de significância escolhido;*

S = *desvio-padrão da amostra*
n= tamanho da amostra

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente Nota Técnica Atuarial contempla a metologia e fórmulas específicas para o Teste de Aderência de hipóteses **biométricas, demográficas, econômicas e financeiras** de plano de benefícios previdenciais. Para a eleboração dos testes de aderência das hipóteses são observados a **experiência do plano e demais parâmetros concernentes, massa de participantes e assistidos, patrocinadora e demais cenários ditados pela Entidade.** São observados ainda os métodos atuariais utilizados pela Mercer GAMA, os quais consideramos adequados aos propósitos de um plano de benefícios previdenciais.

A aplicação das metodologias está de acordo com a legislação em vigor e com as práticas atuariais internacionalmente aceitas. A leitura deste documento é complementar à análise do relatório específico de estudo de aderência do plano.

Nos termos da legislação em vigor, a escolha das hipóteses atuariais a serem efetivamente utilizadas é de responsabilidade da Entidade, com participação da Diretoria Executiva, Conselho Fiscal e Conselho Deliberativo. A metodologia ora apresentada, bem como o relatório específico de estudo de aderência do plano, têm por objetivo subsidiar esta decisão. Dessa forma, a Mercer GAMA, ou seus representantes, não poderão ser responsabilizados por danos causados, direta ou indiretamente, que resultem de decisões tomadas com base nas informações disponibilizadas nesta Nota Técnica, bem como no relatório de estudo de aderência.

Brasília, 31 de agosto de 2017.

VANESSA VIANA CARVALHO
Estatística CONRE nº 9.773 - 1ª Região
CONSULTORA ESTATÍSTICA

Mariana Abigair de Souza Sabino

MARIANA ABIGAIR DE SOUZA SABINO
Atuária MIBA 2.567 - MTPS/RJ
SUPERVISORA ATUARIAL

CESAR LUIZ DANIELI
Atuário MIBA 824 – MTPS/RJ
DIRETOR DE PREVIDÊNCIA, SAÚDE E SEGUROS

GAMA Consultores Associados 02.941.736/0001-90